定理１[*1]の証明

$AX=E$ の任意の解を X_1、$XA=E$ の任意の解を X_2 とする。

X_1 は、$AX=E$ の解なので、

$$AX_1 = E$$

が成り立つ。この両辺に X_2 を左からかけると、

$$X_2AX_1 = X_2E$$

となる。ここで、$X_2A=E$ であることを用いると、$EX_1 = X_2E$ となり、したがって、

$$X_1 = X_2$$

となる。

$AX=E$ の任意のふたつの解を X_1, X_1' とすると、上記により、$X_1 = X_2,\ X_1' = X_2$ つまり $X_1 = X_1'$ となり、X_1 が $AX=E$ の唯一の解であることがわかる。X_2 も同様に $XA=E$ の唯一の解であることが示せる。

以上より、X_1, X_2 は、それぞれ $AX=E, XA=E$ の唯一解であり、かつ、両者は等しい。

ここで、それを A^{-1} と書くことにすると、

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

である。

[*1] http://uhideyuki.sakura.ne.jp/uikitexi/index.cgi?**線形代数（おべんきょう）１**#p11