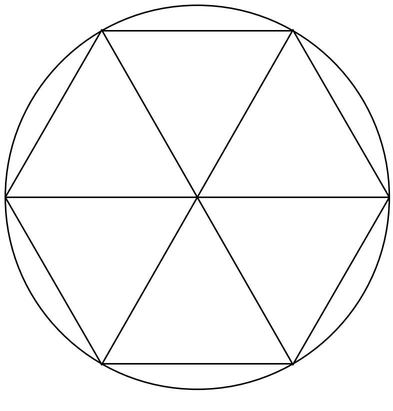
uh07081003 (1)

ジョシュ「ハカセ、ハ・カ・セー！」
ハカセ「……ぶつぶつ」
ジョシュ「ハカセ、どうしたんですか、すっかり目がすわってますよ。」
ハカセ「げふん、げふん。あー、ごにょごにょ。」
ジョシュ「え!? ミルカさんに登場してもらうの？むぼーなんじゃないすか？」
ハカセ「あー、いやー、たとえば、名前を呼ばなければいいんじゃないか……とか。」
ジョシュ「あ、ごめんなさい。もう（↑*2) 名前呼んじゃった。」
ハカセ「はぁー。」

円周率が 3.05 よりも大きいことを証明せよ。

これは、なんだか無暗に有名な問題だよなぁ。みんなよほど東大が好きなんだろうか。
ま、大学入試で出題されるということは、それは高校生にも解ける問題だということだ。
「きみの方針は？」
「とりあえずの方針はこうだ。内接する正多角形の周囲の長さで『下から支える』。正六角形からはじめて、正１２角形、正２４角形……というふうに頂点を増やしていけば、『下から支える』方の値は単調に増加し、かつ、円周を越えない。だから、そのうち、かならず出題者が引いた線 (3.05) をクリアことができる。」
「ふむ。」
「ただ…… 3.05 という数字の意味にまったく見当がついていないところが気になる。この方針でいつかは越えられる数字だというのはわかっているんだけど、もしかしたら、すごく沢山繰り返さなければならないかもしれない。」
「で、きみは繰り返すのが嫌いなのかな？[1]」
「そうじゃないよ。計画のたて方としてどうかなと思っただけ。でも、いまは 3.05 について悩まずに、始めてしまうことにしよう。」
もし、問題が「円周率が 3 よりも大きいことを証明せよ」だったら、円周と、それに内接する正六角形の周を比較すればいい。



[1]白状すると、僕（筆者）はあんまり好きじゃないです。

円の半径を 1 とすると、円周は 2π。内接する正六角形の周囲の方は、6 だ。これを P_6 と書くことにすると、両者の関係は、

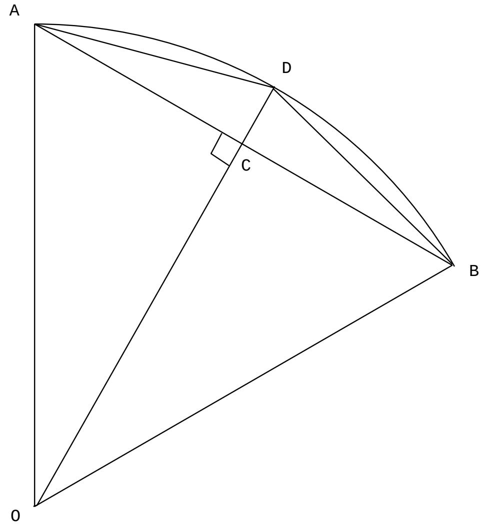
$$2\pi > P_6 = 6$$

したがって

$$\pi > 3$$

であることがわかる。

次に、頂点の数を倍にして正１２角形を考える。先ほどの図の一部を抜き出して、さらに頂点を増やす様子を示したのが次の図。



O は円の中心で、A, B がもとの正六角形にあった頂点。D は、正１２角形にするために新たに加えられることになる頂点だ。OD と AB の交点を C とした。

「うーん、こうやって説明してみると、C より先に D が出てくるのが気持わるいなあ。記号の振り方失敗したかも。」

(あ、返事をしてもらえなかった。)

直角三角形 AOC に着目して、

$$AC^2 + OC^2 = AO^2$$

と、$AO = 1$, $AC = 1/2$ から、

$$OC = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

OD がわかれば、CD の長さも求まる。

$$CD = OC - OC = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

こんどは、直角三角形 DAC に着目して、

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = \frac{1}{4} + \frac{7 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}$$

これより、正１２角形の周囲、P_{12} は、

$$P_{12} = 12AD = 12\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

となる。

円周 2π と P_{12} との関係は

$$2\pi > P_{12}$$

であるから、

$$\pi > 6\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

さて、どうしようかな。

両辺ともに正なので、両辺を二乗して、

$$\pi^2 > 36(2-\sqrt{3})$$

そろそろ、$\sqrt{3}$ の近似値を使うしかなさそうな感じだ。

ここで、$(1.733)^2 = 3.003289$ なので、

$$\sqrt{3} < 1.733$$

である。これと、先ほどの不等式より、

$$\pi^2 > 36(2-\sqrt{3}) > 36(2-1.733) = 9.612$$

また、

$$9.612 > (3.05)^2 = 9.3025$$

なので、

$$\pi^2 > (3.05)^2$$

となる。つまり、

$$\pi > 3.05$$

が示せた。

「ふふ。」

「どうして笑うのかな。……なんとなくわかるような気はするけど。」

「いや、きみと $\sqrt{3}$ は、ずいぶん他人行儀というか、よそよそしい感じなんだね。」

「……。」

うーん、しかし……。

「どこか、ご不満？」

「いや、不満というわけではないよ。たった一度の『繰り返し』で目的は達成されたんだし、この道を来る者は、出題者に歓迎されなかったわけではないと思う。」

「でも？」

「どうして 3.05 だったのかが、やはりわからないな。この数字は、べつの道から来る人むけだったのかも知れない。」

「で、きみは、どうするの？とりあえず、『解けた』からおしまい？」
「まさか。まだ、どこにも触っていない感じだよ。」
まず、今回選んだ道も、最初の『繰り返し』でやめてしまったのでは、この道について何もわからないままだ。もう少し、この道を進んでみるべきなんじゃないかと思う。
あとは、3.05 がなんなのか、気になるけど、直接これに近づく手段はちょっと思いつかない。
この数字のことは、ひとまず忘れて、今回選んだのとはまったく違う道を探してみるのがいいんじゃないかな。
「他にも道があると確信しているんだね。」
「確信……というわけではないけど、π に触れる方法がこれしかないと決めつける理由はないね。」

ジョシュ「ハ、ハカセぇー（赤面）。」
ハカセ「な、なんじゃい（赤面）。」
ジョシュ「こっぱずかしいのは置いておいたとして、計算間違いしてやしないかが不安ですよ。っていうか、きっとどこかミスっていると思う。」
ハカセ「間違いに気づいたら、直せばいいんじゃ。」

この文書について

この文書は海野[2]が書きました。
えーと。ごめんなさい、ごめんなさい。ぜんぜんミルカさんっぽくないし、そもそも彼女の出番がない。相槌係にしてしまった。
ハカセとジョシュは、学生のころ見たあのページ[3] を思いうかべたつもりだったのですが、さっき調べたら「ムーチョ先生」と「パタ子ちゃん」でした。かすりもしてませんでしたね。
ミルカさんというのは、結城浩さんの著書「数学ガール」に登場する ideal girl のうちの一人です。こちらは天才の方の理想人格、もうひとりは最強の学習者ですね。
てっきり、映画「ビューティフルマインド」におけるナッシュのルームメイト、チャールズのような存在だとばかり思っていたのですが。写真にうつるというなら、違うのかもしれません。
僕はというと、これで解けるだろうなぁという方針を立てて、あとは手を動かすだけだと思ってしまうと、もうやる気がでなくなってしまうタイプ。どうせ計算しても間違うだけだしぃ（←あほ)。
「まさか。まだ、どこにも触っていない感じだよ。」なんて、こんなことを言うのは決して僕ではありません。そんなシト知りません。
でも、「数学ガール」を読むと、いろいろ手を動かして探検するのがとても面白い遊びだったような気がしてしまいます。この、面倒くさがりの僕が。
今回の問題は、なんか漫画に登場したり、最近もテレビドラマでみかけたりと、なにかと露出の多かったもの。
私がいま関東に住んでいるせいか、やはり東京が日本の中心だからなのか、このように出題内容が話題にのぼるのも東京の大学であることが多いですね。
京都大学の入試問題のほうが面白いと思うんですけど（もちろん、根拠なし)。

[2]http://uhideyuki.sakura.ne.jp/uDiary/ とか。
[3]http://www.tya.1st.ne.jp/ toshit/variety/how.html